

## 線形計画の双対性

**双対性** (duality) とは<sup>1)</sup>, 互いに対になっている 2 つの対象間の関係をいい, 2 つの対象がある意味で互いに「裏返し」の関係にある場合と解釈してもよい.

線形計画問題にも双対性がある. ある線形計画問題に対して, **双対問題** (dual problem) とよばれるもう一つの線形計画問題を構成することができる. このとき, もとの問題を**主問題** (primal problem) とよび, 互いに双対の関係になっている. これを**線形計画問題の双対性**とよぶ. 一方の問題から他方の問題を導くことをここでは**双対化**とよぶことにする. 後でわかるように, 線形計画問題の双対問題の双対問題はもとの問題にもどる<sup>2)</sup>.

一般に, 双対性理論 (duality theory) は, 非線形計画のみならず線形計画, 多目的計画, 離散凸解析などの分野で主問題とその双対問題の関係および集合や関数の双対関係を説明する重要な基礎理論である. 「双対」(dual) と「共役」(conjugate) はもともと同義語として用いられ, 関数解析の分野では, ノルム空間  $X$  上の有界線形汎関数の全体を  $X$  の双対空間 (dual space) または共役空間 (conjugate space) といい,  $X^*$  と表して,  $x \in X$  における  $x^* \in X^*$  の値を  $\langle x, x^* \rangle$  または  $x^*(x)$  と表す.  $X$  が  $n$  次元数ベクトル空間  $\mathbb{R}^n$  の場合は,  $(\mathbb{R}^n)^*$  と  $\mathbb{R}^n$  は同一視でき,  $(\mathbb{R}^n)^{**} = \mathbb{R}^n$  となり,  $\langle x, x^* \rangle$  は  $x$  と  $x^*$  の内積  $x^{*\text{T}}x$  となる. これは, 第 1 章でみた **1 次形式**の性質として, 線形関数  $p^{\text{T}}x$  の係数ベクトル  $p$  がその線形関数がつくる超平面の法線ベクトルとなっていることに合致する. つまり, 線形関数とその係数ベクトルを同一視して考えるということである.

本章では, 線形計画問題の双対問題のつくり方, 同値変形の仕方, 弱双対定理, 双対定理について説明する.

1) ここで, 「双対」は『そうつい』と読むことが多い.

2) これは, 「 $(-1)$  倍の  $(-1)$  倍」や「逆数の逆数」ももとの数にもどることなどにみられるように, 数学でよくでてくる「回帰性」に関係している. また, 転置行列の転置行列はもとの行列にもどることから「転置」操作も回帰的である. ただし, 「回帰性」が成り立たない双対性もある. 特に, 関数解析などで取り扱う種々の無限次元空間ではよくあることである.

### 3.1 主問題と双対問題

線形計画問題は、本質的には同じ問題を見かけ上異なる形で表すことができる。最小化問題と最大化問題、連立方程式 (等式制約) と連立不等式 (不等式制約)、すべての変数に非負条件がある場合と全部あるいは一部の変数に非負条件が付いていない場合などの違いである。いずれの場合も、同値変形によって一方からもう一方へ変形することができる。そこで、本書では、以下の (P1) と (D1) を標準形、(P2) と (D2) を一般形とよぶことにしよう。

|                                                                                              |                             |                                                                                              |
|----------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------|
| <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;">最小化問題 (標準形)</div> | 双対<br>$\longleftrightarrow$ | <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;">最大化問題 (標準形)</div> |
| (P1) $\text{Min} \quad c^T x$<br>s.t. $Ax = b$<br>$x \geq 0$                                 |                             | (D1) $\text{Max} \quad b^T y$<br>s.t. $A^T y \leq c$                                         |
| <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;">最小化問題 (一般形)</div> | 双対<br>$\longleftrightarrow$ | <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;">最大化問題 (一般形)</div> |
| (P2) $\text{Min} \quad c^T x$<br>s.t. $Ax \geq b$<br>$x \geq 0$                              |                             | (D2) $\text{Max} \quad b^T y$<br>s.t. $A^T y \leq c$<br>$y \geq 0$                           |

このとき、(P1) を主問題とすると、その双対問題は (D1) となり、また、逆に、(D1) を主問題とすると、その双対問題は (P1) となる。ここでは、以下の4通りの双対化が考えられる。

$$\begin{aligned}
 (P1) & \xrightarrow{\text{双対化}} (D1) \\
 (D1) & \xrightarrow{\text{双対化}} (P1) \\
 (P2) & \xrightarrow{\text{双対化}} (D2) \\
 (D2) & \xrightarrow{\text{双対化}} (P2)
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

このとき、これらの4通りのどれか1つを仮定すると、他の3通りの双対化が導ける。これは、以下の点に注意すれば、(P1), (P2), (D1), (D2) の形の問題も他のどの形へも同値変形できることから明らかである。

- 最小化問題と最大化問題の同値性：

$$\text{Min } c^T x \iff (-1)\text{Max } (-c)^T x, \quad \text{Max } b^T y \iff (-1)\text{Min } (-b)^T y$$

- 連立不等式の不等号の向きに関する同値性：

$$Ax \geq b \iff (-A)x \leq -b, \quad A^T y \leq c \iff (-A)^T y \geq -c$$

- 連立方程式と連立不等式の同値性 (等式制約を 2 本の不等式とみて不等式制約として表現する) :

$$Ax = b \iff \begin{array}{l} Ax \geq b \\ -Ax \geq -b \end{array} \iff \begin{pmatrix} A \\ -A \end{pmatrix} x \geq \begin{pmatrix} b \\ -b \end{pmatrix}$$

- 連立不等式と連立方程式の同値性 (スラック変数を利用して, 不等式制約を等式制約として表現する) (以下で  $E$  は単位行列を表す) :

$$\begin{array}{l} Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{array} \iff \begin{array}{l} Ax - z = b \\ x \geq 0, z \geq 0 \end{array} \iff \begin{array}{l} \begin{pmatrix} A & -E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = b \\ \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} A^T y \leq c \\ y \geq 0 \end{array} \iff \begin{array}{l} A^T y + z = c \\ y \geq 0, z \geq 0 \end{array} \iff \begin{array}{l} \begin{pmatrix} A^T & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = c \\ \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \geq 0 \end{array}$$

- 非負条件がない変数の処理: 非負の変数を 2 つ用意して, もとの変数をそれらの差で置き換える. 例えば,  $y$  に非負条件が付いていないのであれば, すべての  $y$  を  $y_1 - y_2$  に置き換えて,  $y_1 \geq 0$  と  $y_2 \geq 0$  を非負条件として加える.
- 非負条件のある変数を双対問題の標準形 (D1) のような非負条件なしの形にする処理:

$$y \geq 0 \iff Ey \geq 0 \iff -Ey \leq 0 \quad (E \text{ は単位行列を表す}),$$

$$\begin{array}{l} Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{array} \iff \begin{array}{l} (-A)x \leq -b \\ -Ex \leq 0 \end{array} \iff \begin{pmatrix} -A \\ -E \end{pmatrix} x \leq \begin{pmatrix} -b \\ 0 \end{pmatrix} \iff (-A^T - E)^T x \leq \begin{pmatrix} -b \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{array}{l} A^T y \leq c \\ y \geq 0 \end{array} \iff \begin{array}{l} A^T y \leq c \\ -Ey \leq 0 \end{array} \iff \begin{pmatrix} A^T \\ -E \end{pmatrix} y \leq \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} \iff (A - E)^T y \leq \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}$$

○例 3.1. (D1)  $\xrightarrow{\text{双対化}}$  (P1) を仮定して, (P1)  $\xrightarrow{\text{双対化}}$  (D1) を導こう. まず, 最小化問題の標準形 (P1) は, 次のようにして, 最大化問題の標準形 (D1) の形に変形できる.

$$\begin{aligned}
 \text{(P1)} \quad & \text{Min} \quad \mathbf{c}^T \mathbf{x} \quad \Longleftrightarrow \quad (-1) \text{Max} \quad (-\mathbf{c})^T \mathbf{x} \\
 & \text{s.t.} \quad \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\
 & \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \quad \quad \quad -\mathbf{A}\mathbf{x} \leq -\mathbf{b} \\
 & \quad \quad \quad \quad \quad \quad -\mathbf{E}\mathbf{x} \leq \mathbf{0} \\
 \\ 
 & \Longleftrightarrow \quad (-1) \text{Max} \quad (-\mathbf{c})^T \mathbf{x} \\
 & \quad \text{s.t.} \quad \begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ -\mathbf{A} \\ -\mathbf{E} \end{pmatrix} \mathbf{x} \leq \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ -\mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \\
 \\ 
 & \Longleftrightarrow \quad (-1) \text{Max} \quad (-\mathbf{c})^T \mathbf{x} \quad (3.2) \\
 & \quad \text{s.t.} \quad (\mathbf{A}^T - \mathbf{A}^T - \mathbf{E})^T \mathbf{x} \leq \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ -\mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

よって, (D1)  $\xrightarrow{\text{双対化}}$  (P1) を利用して, 最大化問題 (3.2) の双対問題は以下のようになり, それを同値変形して (D1) が導ける.

$$\begin{aligned}
 (-1) \text{Min} \quad & \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ -\mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \mathbf{z}_1 \\ \mathbf{z}_2 \\ \mathbf{z}_3 \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{Max} \quad \mathbf{b}^T (-\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2) \\
 & \text{s.t.} \quad (\mathbf{A}^T - \mathbf{A}^T - \mathbf{E}) \begin{pmatrix} \mathbf{z}_1 \\ \mathbf{z}_2 \\ \mathbf{z}_3 \end{pmatrix} = -\mathbf{c} \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{A}^T (-\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2) + \mathbf{z}_3 = \mathbf{c} \\
 & \quad \begin{pmatrix} \mathbf{z}_1 \\ \mathbf{z}_2 \\ \mathbf{z}_3 \end{pmatrix} \geq \mathbf{0} \quad \quad \quad \begin{pmatrix} \mathbf{z}_1 \\ \mathbf{z}_2 \end{pmatrix} \geq \mathbf{0}, \mathbf{z}_3 \geq \mathbf{0} \\
 \\ 
 & \quad \begin{pmatrix} \mathbf{z}_1 \\ \mathbf{z}_2 \\ \mathbf{z}_3 \end{pmatrix} \geq \mathbf{0} \quad \quad \quad \begin{pmatrix} \mathbf{y} = -\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2 \text{ と置き換えると} \\ \mathbf{y} \text{ には非負条件が付かない.} \\ \text{また, } \mathbf{z}_3 \text{ を消去すると} \\ \text{等式制約は不等式制約となる.} \end{pmatrix} \\
 \\ 
 & \Longleftrightarrow \quad \text{(D1)} \quad \text{Max} \quad \mathbf{b}^T \mathbf{y} \\
 & \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{A}^T \mathbf{y} \leq \mathbf{c}
 \end{aligned}$$

□

◆演習 3.1. 次の線形計画問題の双対問題を2通りの仕方で求めよ.

$$(\text{LP}) \quad \begin{cases} \text{Min} & -x_1 - x_2 \\ \text{s.t.} & 3x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

### 3.1 節の問題

[1] 次の線形計画問題の双対問題 (D) を与え、その最適解と最適値を求めよ.

$$(LP) \begin{cases} \text{Min} & 5x_1 + 7x_2 + 11x_3 + 15x_4 \\ \text{s.t.} & x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 10 \\ & x_2 + x_3 + 3x_4 = 20 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

[2] 例 3.1 では, (D1)  $\xrightarrow{\text{双対化}}$  (P1) を仮定して (P1)  $\xrightarrow{\text{双対化}}$  (D1) を導いた. (3.1) の 4 通りの双対化のどれか 1 つを仮定して, 他の 3 通りの双対化を導いてみよ. なお, 全部で  $4 \times 3 = 12$  通りの導き方がある.

## 3.2 弱双対定理と双対定理

線形計画問題の双対関係を再び考えてみよう.  $m \times n$  行列  $A, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$  に対して, 以下の (P) を主問題, (D) をその双対問題と考えることにする.

|                                                                                                                                |                                  |                                                                                                      |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 標準形 主問題                                                                                                                        | 互いに双対関係<br>$\longleftrightarrow$ | 標準形 双対問題                                                                                             |
| (P) $\text{Min} \quad \mathbf{c}^T \mathbf{x}$<br>$\text{s.t.} \quad A\mathbf{x} = \mathbf{b}$<br>$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ |                                  | (D) $\text{Max} \quad \mathbf{b}^T \mathbf{y}$<br>$\text{s.t.} \quad A^T \mathbf{y} \leq \mathbf{c}$ |

上の 2 つの問題で, 主問題の実行可能集合を  $S_P$ , 双対問題の実行可能集合を  $S_D$  と表す<sup>3)</sup>.

$$S_P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}, \quad S_D = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m \mid A^T \mathbf{y} \leq \mathbf{c}\}$$

主問題と双対問題のそれぞれの実行可能解における目的関数値のあいだには双対性が成り立っていて, このことから「双対」という用語が用いられている. 線形計画問題では, 主問題と双対問題のいずれか一方が最適解をもつか, あるいは両方の実行可能解が存在すれば, 両方の最適値が一致する.

まず最初に, 弱双対定理 (weak duality theorem) を紹介する.

3) 1.4 節と 2.5 節でみたとおり,  $S_P$  と  $S_D$  はどちらも凸多面集合となっている.